公理化的表述，实际上是一种抽象。

线性映射 (Linear Mapping)

- $f: V \to W$
  - V, W 均为向量空间
  - $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
  - $f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$
  - 推论（如何证明?）
    - $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$
    - $f(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{u}) + bf(\boldsymbol{v})$
- 低维空间的线性映射
  - 缩放、旋转是线性映射
  - 平移不是线性映射
  - ** 仿射变换 (affine transformation) = 缩放、旋转 + 平移

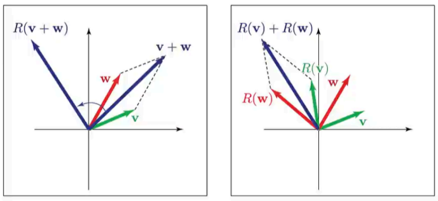


Figure 2.10: Rotation is a linear operator.

仿射变换在 games101 听过。

至于矩阵乘法就是线性变换的观点，emmm，只能说非常有必要了解，但不能奉为唯一真理。

矩阵单目运算

- 转置 (Transpose) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$： $\boldsymbol{A}$ 的所有元素的下标行、列互换
  - 意义：矩阵对应的线性变换在对偶空间里的逆变换对应的矩阵
  - 性质：$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

复数域上的共轭矩阵：转置 + 共轭 记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$

- 行列式 (Determinant) $\det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|$
  - 意义：矩阵对应的线性变换对空间的拉伸程度的度量（物体经过变换前后的体积比）
  - 定义：在 n 阶方阵中选 n 个元素使得每行每列各有一个元素被选出，求其乘积
    - 再将不同选择方案的乘积乘以正负 1（由选择方法的奇偶性决定）加和
  - 计算方法
    - 低维矩阵：n 条主对角线分别计算乘积的和，减去 n 条次对角线分别计算乘积的和
    - 高维矩阵：高斯消元后取对角线元素的和
  - 性质：转置不变；交换行（列）取反

对复数域矩阵提的这个非常有启发性。

行列式与体积的关系……之后再说。

- 迹 (Trace) $\operatorname{tr} \boldsymbol{A}$：矩阵的对角线元素之和
  - 意义：矩阵的特征值之和
  - 性质：$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$；$\operatorname{tr}\boldsymbol{AB} = \operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$；$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})$
- 逆 (Inversed) $\boldsymbol{A}^{-1}$：满足 $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{E}$ 的矩阵
  - 意义：矩阵对应的线性变换的逆变换的矩阵；矩阵的特征值之积
  - 求解：伴随矩阵法；高斯消元法
  - 性质：$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}| = 1$
- 伴随 (Adjugated) $\boldsymbol{A}^*$：由 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素的代数余子式 A_{ij} 构成的矩阵
  - 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$；$M_{ij}$ 为余子式，即删去第 i 行第 j 列后的行列式值
  - 性质：$\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

特征值 (Eigenvalue)

- 对于某些向量 $\boldsymbol{u}$ 满足 $\lambda\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 的数 λ 称为特征值（$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵）
  - 这些向量 $\boldsymbol{u}$ 称为特征向量，每个特征值对应的特征向量构成向量子空间
    - $\lambda\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \Longrightarrow \lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$
  - 求解特征值：$(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = 0$
    - 想得到关于 $\boldsymbol{u}$ 的非零解，则 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$，该行列式对应于一元 n 次方程组
  - 特征值的意义：对于某些向量，特定线性变换的作用效果与数乘等价
- 矩阵多项式的特征值
  - $f(\boldsymbol{A}) = c_k\boldsymbol{A}^k + c_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + c_1\boldsymbol{A} + c_0\boldsymbol{E}$
    - 若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $f(\lambda)$ 必为 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值
    - 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$；则 $f(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值由 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 给出
  - 重要应用：最大特征值称为谱半径 (spectral radius)；最大最小特征值之比称为条件数

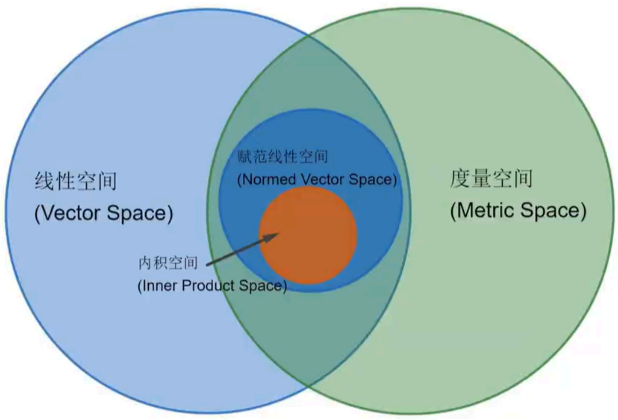
矩阵收敛……我幼小的心灵受到了震撼。好在之前了解过幂级数的收敛性，思维打开了不少。

赋范 (Normed) 向量空间

- 度量空间 vs. 向量空间
  - 向量空间中的元素不能比大小
  - 对于集合 V，定义度量函数 $d: V \times V \to \mathbb{R}$，设 $x, y, z \in V$
    - $d(x,y) \geq 0$（非负性）
    - $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$（不可区分者的同一性）
    - $d(x,y) = d(y,x)$（对称性）
    - $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$（三角不等式）
  - 定义了度量函数的集合 V 称为度量空间 (metric space)，度量函数 d 又称为"距离"
- 赋范向量空间 = 向量空间 + 度量函数（$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$）
  - 定义范数 $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$，设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$
    - $\|\boldsymbol{u}\| \geq 0$, $\|\boldsymbol{u}\| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ (正定性)；$\|a\boldsymbol{u}\| = |a|\|\boldsymbol{u}\|$ ($a \in \mathbb{R}$) (正齐次性)
    - $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (次可加性, 三角不等式)

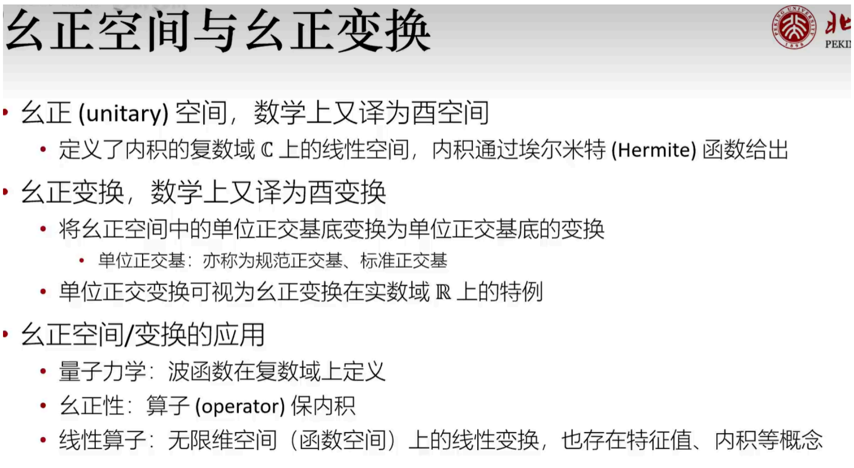
内积空间 (Inner Product Space)

- 内积：$V \times V \to \mathbb{R}$
  - $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的内积记作 $\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$
  - $\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \overline{\langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle}$
  - $\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\rangle = \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle$
  - $\langle\boldsymbol{u}, a\boldsymbol{v}\rangle = a\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$
  - $\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle \geq 0$
- 赋范线性空间 vs. 内积空间
  - $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle$
  - 范数只给出了向量的长度
  - 内积还给出了向量的夹角

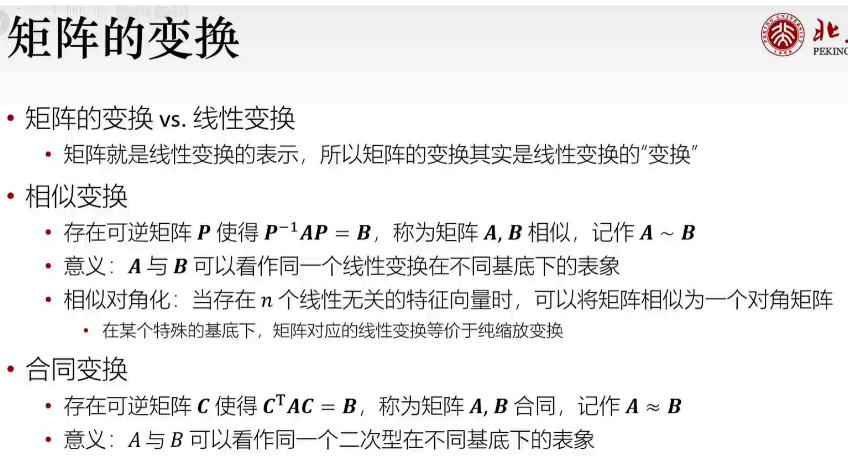


注意，点积是内积的一种特殊情况。

嗯，我也只知道笛卡尔坐标系这个特例了。不过紧接着就给出了酉空间的例子，哈哈，看不太懂，似乎是泛函分析的内容。



后面的跟 games101 讲的差不多。



相似变换可以用类似上一张 ppt 讲的理解：

- 绕任意轴旋转
  - $\boldsymbol{R}^T\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{R}$
  - $\boldsymbol{R}$ 为将旋转轴转为 z 轴的变换矩阵
  - 参见第三讲

也就是先改变基底，再变换，再把基底改回来。

二次型

- 二次型 (quadratic form)：n 个变量的二次多项式
  - 示例：圆锥曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$
    - 矩阵表示 $\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0$
  - 一般形式：$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$
  - 合同变换后：$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=0 \Longrightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=0 \Longrightarrow (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})=0$
    - 意义：变换基底后的二次型系数
  - 应用
    - 将某任意朝向的椭圆方程转换为标准形式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
      - $\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & 1/b^2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0$

唉，听不懂，必须狂补知识了，下篇博客就干这件事。